闲话 Majorana 费米子

一

在现代物理学的历史上，意大利人 Majorana 是一个谜一般的人物。他天才横溢，像流星一样划过理论物理学的天空，留下了以他名字命名的 Majorana 方程，然后在一次旅行中消失，引发后人无数的猜测和传说。我们文章的主角——Majorana 费米子，最早就是用来称呼能够被 Majorana 提出的方程描写的粒子。

我们生活的物理世界中有两大类基本粒子：费米子和玻色子。费米子组成了我们的物质世界，而（规范）玻色子则传递物质间的相互作用。值得一提的是，这句话在 2012 年 7 月前都是无比正确的金科玉律，直到 LHC 发现了迄今知道的唯一一种标量粒子——Higgs 玻色子。费米子种类繁多，包括三代夸克，轻子和中微子。尽管如此，在数学上大部分费米子都由 Dirac 方程描述。Paul Dirac 在 1928 年基于纯粹的数学构造得到了描写费米子的相对论性方程，并预言了反粒子的存在，而后在 1932 年得到了实验的证实。这一直被认为是理论物理最华丽的篇章之一。推而广之，所有的带电 Dirac 费米子都有对应的反粒子。正反粒子的唯一区别在于他们的电荷，除此之外的性质都完全相同。Majorana 则在 Dirac 方程问世的几年后提出了这样一个问题：对相对论性费米子，反粒子的存在是必然的吗？显然假如粒子不带电，它的反粒子（假如存在的话）和本身将完全无法区分。Majorana 推导出了相应的方程，并建议他的结果可能描写了当时唯一知道的电中性物质粒子——中微子。

将近 80 年过去了，中微子是不是 Majorana 费米子仍然悬而未决。部分的困难在于中微子不带电。而物理学家绝大部分的测量手段都和粒子的电磁性质有关，毕竟电磁力是唯一一种人类能够在自身可以直接感知的尺度上进行控制的相互作用。这一点不单粒子物理学，凝聚态物理学也如此。因此对中微子的探测都困难重重，需要布下千军万马，层层拦截，才能在浩渺的宇宙中抓住几个。因此在很长一段时间内，Majorana 费米子只是作为一个优美的理论构造存在于理论家的脑海里。

二

在物理学的另一分支——凝聚态物理中，人们关心的是物质材料在极低温时的性质，或者更准确的说，物质的基态和低能激发态的性质。粗看起来凝聚态物理和高能物理完全是两个极端：高能实验的必备品大型粒子加速器小号的也是数公里长，而凝聚态实验的样品很少有超过一个巴掌大的。加速器的能量动辄几百兆电子伏，凝聚态实验家恨不能把温度直接降到绝对零度去才好。但是深层次上两个领域之间却有着千丝万缕的联系。假如我们暂时抛开人类的渺小视野，想象一下整个宇宙作为一个物理体系，处在什么样的状态，就会意识到在大爆炸 140 亿年以后，我们生活的宇宙早已冷却到离“基态”不远了。而人类所能观测到的能量尺度，和大宇宙真正

的“典型”能量尺度——Planck 能量相比，几乎都小的可以忽略不计。在这个意义上，凝聚态物理和高能物理殊途同归。它们所研究的对象，都是量子多体系统的“低能”状态，所用的语言也基本上是量子场论。所以自然而然的，凝聚态体系的研究也围绕着“基本粒子”展开——某种材料的激发态在量子化后往往可以近似看做独立运动的“准粒子”。这一概念发源于俄国物理学家 Landau 对液氦的研究，如今已经是凝聚态理论的基本概念。

这些准粒子作为宏观体系的集体激发态，常常表现出和微观粒子截然不同的行为。光看微观的组成，所有的材料，周期表上从头数到尾，也就是质子、中子和电子各种各样的组合。质子和中子组成的原子核在大多数时候存在感十分稀薄，只是默默搭好晶格背景供电子活动，有些时候会抖一下形成声子。但是就这样貌似十分单调乏味的系统，却一生二，二生三，三生万物地衍生出花样繁多的准粒子——声子，旋子，极化激元，等离激元，任意子……这也是凝聚态物理学最引人入胜之处。

读者想必已经料到我们接下来要说的故事了：Majorana 费米子能不能作为准粒子出现在凝聚态系统中呢？需要指出的是，这里“Majorana 费米子”的含义并不仅限于指满足 Majorana 方程的基本粒子，而是泛指电中性的费米型准粒子，其反粒子就是自身。我们知道电子和原子核都是带电的，凝聚态系统的能量尺度远远不足以产生任何的正电子。但多体系统的行为只能用一句话形容：只有想不到的，没有做不到的。在凝聚态物理中正好就有这样一类系统，电荷不再守恒：超导体。超导也是二十世纪物理学的一大里程碑式的杰作，也是我们刚才提到的凝聚态物理和高能物理之间联系的绝佳范例（作为凝聚态物理的从业人员，作者不得不表示这几乎是唯一一个凝聚态物理反过来启示高能物理的例子）。我们在这里简单的复习一下超导体的性质。在超导体中，电子之间通过某种吸引作用两两配对，形成所谓的 Cooper 对。Cooper 对的凝聚就产生了超导现象。从某种意义上来说，超导体就是一个 Cooper 对的汪洋大海。在这样的海洋中，产生一个电子和产生一个空穴（即“反粒子”）的差别消失了：这两个态仅仅差了一个 Cooper 对，而一个 Cooper 对相对于无穷无尽的凝聚体来说显然是微不足道的。这也就是我们通常所说的超导体自发破坏了电荷守恒对称性，电荷只是模 2 守恒。正因为如此，超导体中电子和空穴的界限变的模糊起来，两者可以形成量子叠加态作为超导体的低能激发，这样的“准粒子”是电中性的 [1]。用二次量子化的语言，可以把准粒子的产生算符写成

$$\gamma = u\psi_\uparrow + v\psi_\downarrow^\dagger$$

其中ψ是电子的消灭算符，u 和 v 是叠加的权重（见图 1）。到此 Majorana 费米子似乎已经呼之欲出了：电中性，费米子，粒子和反粒子的叠加态。但是且慢，电子除了电荷还有自旋自由度，而常见的超导体都是自旋单态配对，即配对的两个电子形成自旋单态。这就意味着最后得到的叠加态也是带自旋的，这样的准粒子不可能是 Majorana 费米子 。直接看γ的表达式也能发现准粒子和它的共轭不可能相等。

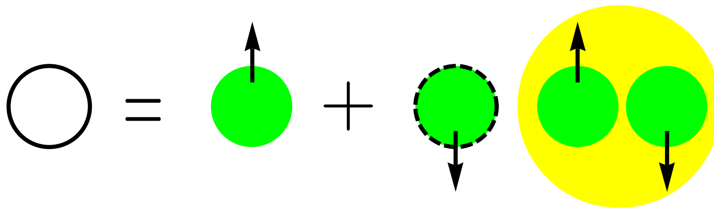


图 1：自旋单态配对超导体中的准粒子激发可以看做自旋向上的电子和自旋向下的空穴的叠加，两者相差一个 Cooper 对。

尽管此路有些不通，我们遇到的困难似乎并不是无法克服。既然自旋单态配对不行，能不能让相同自旋的电子形成配对？多体系统再次无所不能，这样的超导配对大自然早都准备好了——祖师爷 Landau 研究过的氦 3 在低温下形成的超流态就是自旋三重态配对。这还没完，实验家找到了各种各样的材料，例如重费米子超导体，钌氧化物超导体 Sr_2RuO_4，都具有自旋三重态配对。当然这仅仅是形成 Majorana 费米子的必要条件。理论上可以证明，能够出现 Majorana 费米子的自旋三重态配对必须有特定的形式，称为手征 p 波配对。在这一类超导体中，形成 Cooper 对的两个电子之间有相对运动，不妨认为它们在某一平面上互相绕对方顺时针或者逆时针转动，在垂直平面方向的角动量投影是$\pm\hbar$。这实际上是 Pauli 不相容原理的要求，即相同自旋的电子组成的 Cooper 对必须有内部相对运动，来避免两个电子“碰到”。在这样的超导体中加上磁通产生一个涡旋(vortex)，涡旋的中心就会出现一个零能量的激发态，恰好是我们要寻找的 Majorana 费米子！

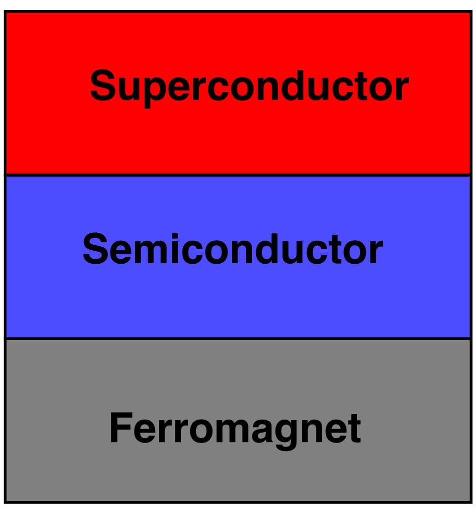
手征 p 波超导体是所谓手征拓扑超导体最简单的例子。除了涡旋中的 Majorana 费米子，手征拓扑超导体还有其它不同寻常的性质，例如手征边缘态，量子化 Hall 热导率等等。遗憾的是，这一回大自然不太配合，迄今我们还没有在自然界中找到手征 p 波配对的超导体 [2]。

三

寻找 Majorana 费米子的突破出现在 2008 年。Pennsylvania 大学的物理学家 Charles Kane 和他的博士研究生傅亮另辟蹊径，不再纠结于配对机制——毕竟自然界里最常见的是自旋单态配对，而是在电子的能带结构上作文章。如果电子的能带结构破坏了自旋对称性，是不是也能够产生 Majorana 费米子？Kane 和傅亮在这之前已经在拓扑绝缘体方面做了开拓性的工作，他们注意到三维拓扑绝缘体的表面态是强自旋轨道耦合的 Dirac 费米子，电子的自旋方向和运动方向“锁”在一起。他们在表面态的理论中加入了超导自旋单态配对，结果发现超导涡旋中出现了 Majorana 费米子！至于如何在表面态产生超导配对则被 Kane 和傅亮用一种巧妙的方式解决了：

通过在表面上放一块超导体来来诱导出配对。这一方案令人耳目一新：自旋轨道耦合、超导邻近效应，都是之前这一领域的研究者们没有注意到的，尤其是这种DIY”组装”拓扑超导体的想法，更是大大开拓了研究者们的思路, 自己动手，不用再靠天吃饭 。

Kane 和傅亮的方案理论上十分简单优美，实验上看起来也没有什么根本性的困难。但是拓扑绝缘体作为一个新材料“出生”于 2006 年，到那时也不过“两周岁”，仍然处于初步的摸索阶段。有没有可能用更加传统的材料来替换这里的拓扑绝缘体表面态呢？Maryland 大学的 Das Sarma 研究组在 Kane 和傅亮工作的基础上再进一步。他们发现，只要用物理学家们研究了好几十年的准二维半导体材料，加上合适的外 Zeeman 磁场就可以达到同样的效果。具体来说，Zeeman 磁场使得电子自旋极化，当材料的费米能比 Zeeman 能量更低的时候真正参与物理过程的只有自旋极化的电子。但是自旋极化的电子无法参与自旋单态配对，自旋轨道耦合这时候起到了关键作用，使得极化的电子也能够得到有效的配对。从图 2 中可以看到，费米面上动量相反的电子自旋方向在 *xy* 平面的投影也相反，因此可以形成单态配对。这几个因素综合在一起，就实现了 Majorana 费米子所需要的拓扑超导体。



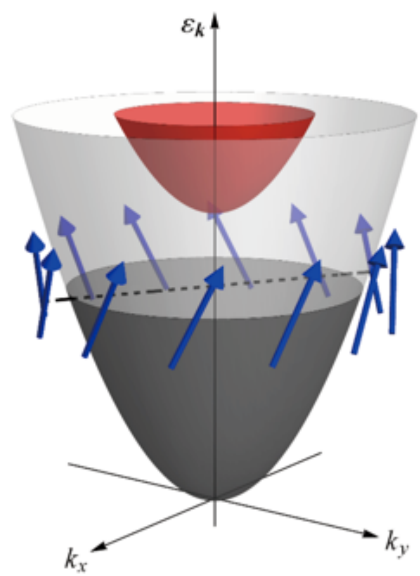


图 2：左：半导体超导体混合结构示意。右：半导体中电子自旋轨道耦合（右图取自 Sau *et.al*. Phys. Rev. B 83, 140510(2010))

至此，经过理论家的不懈努力，实现 Majorana 费米子需要的“原料”已经从原来的“阳春白雪”降到了“下里巴人”，成功的希望似乎就在眼前了。在这两个方案先后出炉之后，世界各地的实验室都开始行动起来，加入到这一场寻找 Majorana

费米子的竞赛当中。理论家也没有闲着，新的实现方案接连问世，关于各种实验系统的性质和测量方案的研究也是如火如荼。最后，这场竞赛被荷兰 Delft 大学 Leo Kouwenhoven 教授的团队拔得头筹，在今年的 APS 年会上宣布他们观察到了 Majorana 费米子存在的迹象。在此之后数个其它实验组也报道了类似的结果。需要说明的是，Kouwenhoven 团队所研究的实际上是准一维系统中的 Majorana 零模，某种程度上可以看做是二维拓扑超导体在一维的“投影”。

四

凝聚态物理学家对 Majorana 费米子如此着迷，并不仅仅出于科学家的好奇心。尽管好奇心是一切科学探索的原力，但我们还需要一些更加务实的理由来支撑庞大的实验室和科研团队。值得庆幸的是，Majorana 费米子虽然听起来虚无缥缈，但实实在在的用处也不小。这要归功于俄国物理学家 Alexei Kitaev。不久前 Kitaev 因为在拓扑量子计算方面的开拓性贡献获得了 300 万美元的大奖。他获奖的理由正好就是 Majorana 费米子大显身手的地方——建造拓扑量子计算机。我们知道，量子计算机的基本单元是量子比特(qubit)，或者朴实一点叫“二能级系统”。有了量子比特，我们可以在上面进行运算，实现各种量子逻辑门操作。量子计算机相比经典计算机的优势在于量子力学叠加原理的威力，使得比特可以处于两个状态的线性叠加。为了发挥量子计算机超越经典计算机的计算能力，硬件上需要保证比特的量子相干性(coherence)，防止“退相干”(decoherence)。一旦相干性丧失，量子计算机就“沦为”经典的普通计算机，失去了它的优势。

不幸的是，一个很小的量子系统——例如一个量子比特——的相干性是很脆弱的，因为它会和周围庞大的，杂乱无章的环境发生作用。在环境拖后腿的干扰下，相干性会在很短时间内消失，短到我们没法用来做任何实际的计算。因此量子计算机研究的一大主题就是提高量子比特的存活时间。此外，一个真正实用的量子计算机显然不可能只有一个比特，所以实际上需要保持多个比特之间的相干性。我们还没有提到量子比特的运算，这些运算操作同样会受到环境的影响，产生种种无法预料的误差。这些都给物理学家提出了巨大的挑战。除了想方设法寻找更稳定的量子比特的物理实现，物理学家们还发明了种种软件层次上的“纠错”机制，双管齐下来解决这一难题。

拓扑量子计算想要的是在硬件层次上一揽子解决如上所说的相干性和纠错问题。这听起来像天方夜谭，但 Kitaev 却找到了这样的办法！他的构想的关键是一类称为 non-Abelian 任意子的奇特准粒子。没错，准粒子——自然界里没有这样的基本粒子，它们只能存在于二维空间的“拓扑相”中。之所以叫任意子，因为它们的量子统计和通常的玻色子或者费米子有极大的不同。我们知道，全同粒子的量子统计指的是当两个粒子的位置发生交换时，整个系统的量子态的变化。数学上可以证明，三维空间中，只允许存在玻色子和费米子：交换之后量子态或者不变（玻色子），或者变号（费米子）。 但是二维世界则完全不同。除了玻色子和费米子，量子态 h

在交换之后还可以差一个任意相位因子。这样的准粒子称为 Abelian 任意子。 Non-Abelian 的粒子则更加复杂。在好几个 non-Abelian 任意子同时存在的时候，整个体系的状态并不是唯一的。仅仅固定准粒子的位置，我们无法确定系统处于哪个量子态，可能的“备选” 数目随着粒子数指数增大。所有这些态都有着几乎相同的能量（简并）[3]。交换任意两个粒子则会导致系统的状态从一个变到另一个——不仅仅是相位的改变，甚至整个量子态都变化了。

多个准粒子导致的简并态有一个有趣的特点：它们从局部看是一模一样的，也就是说没有任何局域的物理测量能够区分开这些简并基态。因此这些简并得名“拓扑简并”。更进一步来说，这些准粒子所处的量子态（简并态的某个线性叠加）也是不可能被局部扰动所改变。当然，凡事不可绝对化。如果局域扰动强到能够破坏系统的能隙，所有的稳定性也就无从谈起了。

为什么这样的系统可以建造量子计算机呢？首先，我们回忆一下普通的量子比特。在有 n 个量子比特的时候，计算机可能的状态有2^n个。和 non-Abelian 任意子不同的是，这2^n个状态并不一定简并，而且交换这些比特也不会导致计算机状态的变化。但是仅仅从状态数这一点，non-Abelian 任意子完全可以胜任量子比特的任务。这些简并态不可能被任何的（弱）局域扰动所影响，因此也无需担心退相干的问题。前面提到交换两个粒子会导致系统的状态发生变化——这正好可以用来作为量子门操作。相比通常的量子门操作，这种办法有一个意想不到的优点：门操作的结果只依赖于两个粒子发生了交换，至于它们是怎么交换的，走的是一个什么样的轨迹，走得快还是慢，都无关紧要。理论上说，这样的量子门是完全没有任何“误差”的。这就给实际实现带来了巨大的自由度。 于是，我们至少在理论上解决了门操作的纠错问题——从硬件层面就保证没有任何错误需要纠正。

拓扑计算机的设想听起来非常美好，但一切的前提是要有 non-Abelian 任意子. 奇妙的是，拓扑超导体中的 Majorana 费米子恰好就是最简单的 non-Abelian 任意子. 具体来说，假如超导体中有两个涡旋，每个涡旋都带有一个 Majorana 费米子。我们再假设这两个涡旋离得很远，中间被超导能隙的“崇山峻岭”隔开，天各一方。超导体归根到底是由电子组成，电子是普通的 Dirac 费米子。为了知道这两个涡旋的低能激发态，我们必须把两个 Majorana 费米子组成普通的 Dirac 费米子。换句话说，这两个“异地恋”的涡旋合起来组成了一个能够被电子占据的能级。假如我们在这个能级上摆一个电子，然后再去用探测电子在空间的分布，就会发现它同时出现在两个涡旋上——电子被拆成了两个 Majorana 费米子。由此也知道两个涡旋正好组成了一个二态系统（电子占据/不占据）。以此类推，4 个涡旋可以两两配对，组成 4 个态。一般地$2n$个涡旋有2^n个简并状态[4]。平摊到每个涡旋头上，可以说每个涡旋在平均意义上有“$\sqrt{2}$”个态——这也是 non-Abelian 任意子的一桩奇特之处，每个粒子所带的“自由度”数目是一个无理数。交换两个 Majorana 费米子则会让系统在这2^n个态形成的子空间中转动，这就是我们需要的量子门操作。

当然 Majorana 费米子也并非十全十美。量子计算的理论研究早已证明，所有可能的量子逻辑运算都可以分解成几个基本的运算：Hadamard 门，$\pi/4$ 比特旋转，

CNOT（两个比特的控制非门）。能够实现这三个基本运算的量子计算机就称为“通用”(universal) 量子计算机。遗憾的是，Majorana 费米子形成的系统并不是通用的。Majorana 费米子之间的交换只能做出 Hadamard 门和 $\pi/2$旋转。为了实现通用量子计算机，我们需要寻找更加复杂的 non-Abelian 任意子，或者在 Majorana 费米子上引入更复杂的操作。这就把我们带到了 Majorana 费米子和拓扑量子计算理论研究的最前沿。

我们关于 Majorana 费米子的介绍到这里也就暂时画上了句号。但是关于凝聚态系统中 Majorana 费米子和其它 non-Abelian 任意子的研究，特别是实验方面的工作，现在才刚刚拉开了序幕，让我们以“且听下回分解”来结束这篇介绍吧。

[1] Bogoliubov 准粒子里电子和空穴的权重一般是不一样的，因此直接计算电荷在一个准粒子激发态上的平均值会发现它们仍然可以有净电荷。但是在超导体中，这些残留的净电荷会被 Cooper 对凝聚体的动态涨落所屏蔽，最后的结果是准粒子激发不带电。

[2] 液氦 3 的超流 A 相是手征 p 波配对。但是因为自旋简并，想要得到单个 Majorana 费米子必须要能够在超流中产生一个“半量子涡旋”(half-quantum vortex)。这样的涡旋是热力学不稳定的。目前实验上仅仅在介观尺度的样品中观察到了半量子涡旋的可能迹象。

[3] 简并态之间的能级分裂(splitting)随着准粒子之间的距离指数衰减(正比于 $e^{-L/\xi}$，其中 L 是准粒子间的距离，ξ是关联长度，反比于系统的能隙)。

[4] 严格的说简并数目是$2^n/2$, 因为基态只能有固定的模 2 费米子数（即总费米子数的奇偶性是一个守恒量）。